

Майер Р.В.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ НА ПЭВМ: ДИФФУРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОЗВОДНЫМИ

robert_maier@mail.ru

Глазовский государственный педагогический институт

г. Глазов

Рассмотрены типичные задачи по курсу “Основы компьютерного моделирования”, анализ которых предполагает решение дифференциальных уравнений в частных производных. Предложены программы на языке Pascal, позволяющие решить эти задачи, приведены результаты расчетов на ПЭВМ.

Some typical problems for the course "Fundamentals of computer simulation" have been considered. Analysis of these problems involves solving partial differential equations. Pascal-based software programs enabling solving these problems have been offered, and calculation result have been provided.

Обучение основам компьютерного моделирования требует рассмотрения методов решения дифференциальных уравнений с частными производными. Ниже предложены несколько типичных задач, представлены программы на языке Pascal и проанализированы результаты их решения.

Задача 1. В прямоугольной области задано распределение зарядов $\rho(x, y)$ и значения потенциала φ вдоль границы G . Необходимо определить потенциал электростатического поля во всех точках области.

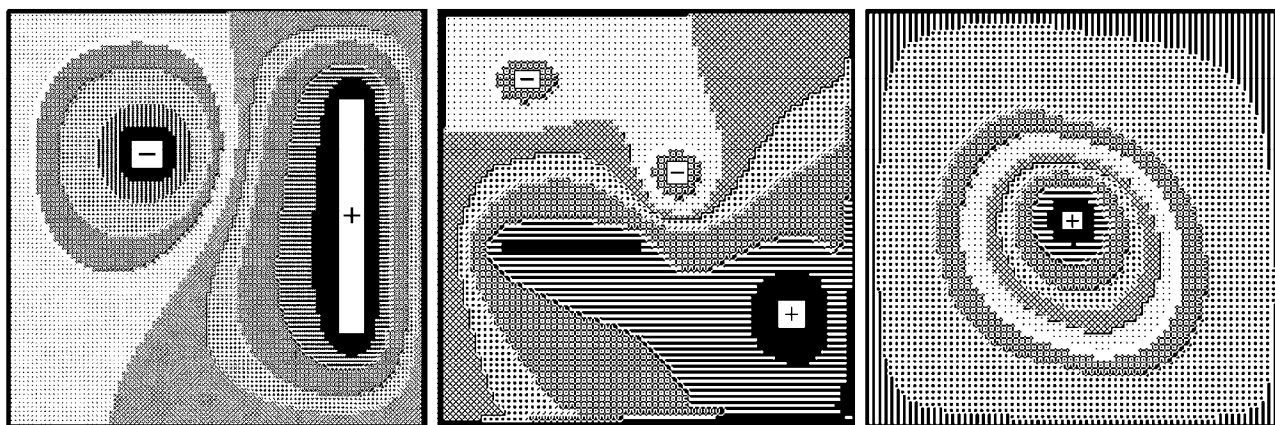


Рис. 1. Результаты расчета потенциала электростатического поля.

Распределение потенциала характеризуется уравнением Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\rho(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = -\rho(x, y).$$

Это уравнение также описывает безвихревое течение жидкости, стационарное распределение температуры в различных точках пластины, деформацию упругой пленки и т.д. Перейдем к конечным разностям:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \approx \frac{\varepsilon_{i+1,j} - \varepsilon_{i-1,j}}{2h} \cdot \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2h} + \varepsilon_{i,j} \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2},$$

$$\varphi_{i,j} = (\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \rho_{i,j} h^2 / \varepsilon_{i,j}) / 4 + \\ + [(\varepsilon_{i+1,j} - \varepsilon_{i-1,j})(\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}) + (\varepsilon_{i,j+1} - \varepsilon_{i,j-1})(\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1})] / (16\varepsilon_{i,j}).$$

Эта задача решается релаксационным методом последовательных приближений (программа 1). Получающиеся распределения потенциала электростатического поля в однородной и неоднородной среде при различном распределении заряда и граничных условиях представлены на рис. 1.

Программа 1.

```
uses crt, graph;
const n=70; m=70; var i, j, ii, jj, k, q, DriverVar, ModeVar, ErrorCode : integer;
fi, e: array[1..N, 1..M] of real;
procedure Sreda; {---Диэлектрическая проницаемость среды---}
begin For i:=1 to N do For j:=1 to M do
begin e[i,j]:=1+0.015*j*i; end; end;
procedure Raschet; {---- Расчет потенциала ----}
begin q:=0; if ((i>30)and(i<40)and(j>30)and(j<40))then q:=80;
fi[i,j]:=(fi[i+1,j]+fi[i-1,j]+fi[i,j+1]+fi[i,j-1]+q/e[i,j])/4+((e[i-1,j]-e[i+1,j])*
(fi[i+1,j]-fi[i-1,j])+(e[i,j-1]-e[i,j+1])*(fi[i,j+1]-fi[i,j-1]))/(16*e[i,j])); end;
procedure Gran; {---- Граничные условия ----}
begin for i:=1 to N do begin fi[i,2]:=0; fi[i,M-1]:=0; fi[2,i]:=-20; fi[N-1,i]:=20; end;
for j:=20 to 25 do fi[55,j]:=0; end;
procedure Draw; {---- Вывод на экран ----}
begin if fi[i,j]>-400 then setcolor(15); if fi[i,j]>-350 then setcolor(0);
if fi[i,j]>-300 then setcolor(1); if fi[i,j]>-200 then setcolor(2);
if fi[i,j]>-100 then setcolor(3); if fi[i,j]>-50 then setcolor(4);
if fi[i,j]>-25 then setcolor(5); if fi[i,j]>-15 then setcolor(6);
if fi[i,j]>-7 then setcolor(7); if fi[i,j]>7 then setcolor(8);
if fi[i,j]>15 then setcolor(9); if fi[i,j]>25 then setcolor(10);
if fi[i,j]>50 then setcolor(11); if fi[i,j]>100 then setcolor(12);
if fi[i,j]>200 then setcolor(13); if fi[i,j]>300 then setcolor(14);
if fi[i,j]>300 then setcolor(15); if fi[i,j]>400 then setcolor(0);
if abs(fi[i,j])<3 then setcolor(15);
rectangle(i*4+50,j*4,i*4+54,j*4+4); rectangle(i*4+51,j*4+1,i*4+53,j*4+3);
end;
BEGIN DriverVar:=Detect; InitGraph(DriverVar,ModeVar,'c:\bp\bgi');
ErrorCode:=GraphResult; if ErrorCode <> grOK then Halt(1);
Sreda; Repeat inc(k); For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do Raschet;
Gran; For j:=2 to M-1 do For i:=2 to N-1 do Raschet;
```

```

Gran; For i:=2 to N-1 do For jj:=2 to M-1 do begin j:=M+1-jj; Raschet; end;
Gran; For j:=2 to M-1 do For ii:=2 to N-1 do begin i:=N+1-ii; Raschet; end;
Gran; If k/10=round(k/10) then For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do Draw;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Задача 2. Изучите установившееся потенциальное течение идеальной жидкости по трубе прямоугольного сечения. Внутри трубы имеются выступы и различные препятствия. Постройте линии тока.

Рассматриваемое течение является плоским, характеризуется потенциалом скорости $\varphi(x, y, z)$ и функцией тока $\varphi'(x, y, z)$, которые удовлетворяют уравнению Лапласа. В конечных разностях получаем:

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0, \quad \varphi'_{i+1,j} - 2\varphi'_{i,j} + \varphi'_{i-1,j} + \varphi'_{i,j+1} - 2\varphi'_{i,j} + \varphi'_{i,j-1} = 0.$$

Семейство линий равного потенциала скорости $\varphi(x, y, z) = const$ ортогонально совокупности линий тока $\varphi'(x, y, z) = const$. Значения функции тока находят с помощью уравнения $\varphi'_{ij} = 0,25(\varphi'_{i+1,j} + \varphi'_{i-1,j} + \varphi'_{i,j+1} + \varphi'_{i,j-1})$. В программе перебираются узлы сетки, пересчитываются значения функции тока $\varphi'_{i,j}$ и результат выводится на экран (рис.2).

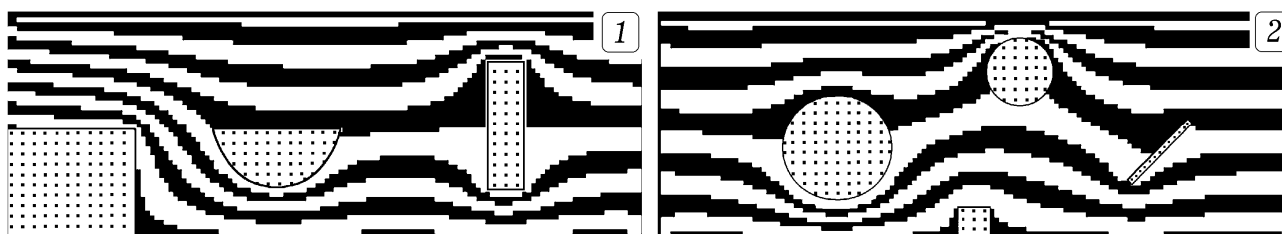


Рис. 2. Расчет потенциального течения идеальной жидкости.

Программа 2.

```

uses crt, graph; const n=140; m=50;
var i,ii,j,jj,k, DV, MV, EC : integer; psi: array[1..N, 1..M] of real;
procedure Raschet; {---- Расчет потенциала ----}
begin psi[i,j]:=(psi[i+1,j]+psi[i-1,j]+psi[i,j+1]+psi[i,j-1])/4; end;
procedure Gran_usl; {---- Граничные условия ----}
begin for i:=1 to N do begin psi[i,2]:=-200; psi[i,M-1]:=200;
psi[i,1]:=-200; psi[i,M]:=200; end;
for j:=1 to M do begin psi[N-1,j]:=-204+8*j; psi[N,j]:=-204+8*j; end;
for j:=1 to 25 do begin psi[2,j]:=-204+16*j; psi[N-1,j]:=-204+8*j;
psi[1,j]:=-204+16*j; psi[N,j]:=-204+8*j; end;
for i:=1 to N do for j:=1 to M do
if (j>25)and((i-60)*(i-60)+(j-25)*(j-25)<200) then psi[i,j]:=0;
for i:=1 to N do for j:=1 to M do

```

```

if (abs(j-25)<15)and(abs(i-110)<5) then psi[i,j]:=0;
for i:=1 to N do for j:=1 to M do if (j>25)and(i<30) then psi[i,j]:=200; end;
procedure Draw; {---- Вывод на экран ----}
begin setcolor(round((psi[i,j]+200)/20));
if ((j>25)and((i-60)*(i-60)+(j-25)*(j-25)<200)) or ((j>25)and(i<30))or((abs(j-25)<15)
and(abs(i-110)<5)) then setcolor(0);
rectangle(i*4+50,j*4,i*4+53,j*4+3); end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
EC:=GraphResult; if EC <> grOK then Halt(1);
Repeat inc(k); Gran_usl; for i:=2 to N-1 do for j:=2 to M-1 do Raschet;
Gran_usl; for jj:=2 to M-1 do
for ii:=2 to N-1 do begin i:=N+1-ii; j:=M+1-jj; Raschet; end;
if k/10=round(k/10) then begin cleardevice;
for i:=2 to N-1 do for j:=2 to M-1 do Draw; end;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.
    
```

Задача 3. Имеются две несмешивающиеся жидкости с различными вязкостями и плотностями. На свободной поверхности находится пластина, которая движется со скоростью, изменяющейся по закону $v = v(t)$. Определите распределение скоростей по слоям жидкости, если движение ламинарное.

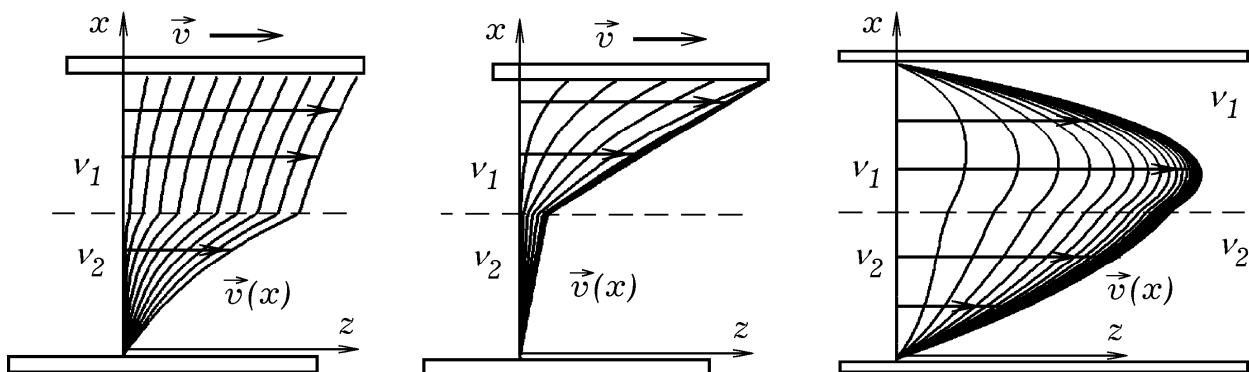


Рис. 3. Расчет движения двух вязких жидкостей (одномерный случай).

Задача 4. В пространстве между двумя горизонтальными бесконечно широкими пластинами находится вязкая жидкость. Рассчитайте скорости различных слоев жидкости, если на концах канала поддерживается постоянная разность давлений. Решите задачу для случая, когда между пластинами две несмешивающиеся жидкости с различными вязкостями и плотностями. Течение ламинарное.

Чтобы решить задачи 3 и 4, запишем уравнение движения вязкой жидкости для одномерного случая в конечных разностях:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v(x) \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\frac{v_i^{\tau+1} - v_i^{\tau}}{\Delta t} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} \cdot \frac{v_{i+1}^{\tau} - v_{i-1}^{\tau}}{2h} + v_i^{\tau} \frac{v_{i+1}^{\tau} - 2v_i^{\tau} + v_{i-1}^{\tau}}{h^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

$$v_i^{\tau+1} = v_i^{\tau} + \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} \cdot \frac{v_{i+1}^{\tau} - v_{i-1}^{\tau}}{2h} \Delta t + v_i^{\tau} \frac{v_{i+1}^{\tau} - 2v_i^{\tau} + v_{i-1}^{\tau}}{h^2} \Delta t - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Delta t.$$

Для расчетов используется программа 3, результаты представлены на рис. 3.

Программа 3.

```
uses crt, graph;
const n=90; h=1; dt=0.05; var k, ii, i, DV, MV, EC : integer; rho, t : real;
nu, v, vv: array[1..N] of real;
procedure Raschet; {---- Расчет скорости ----}
begin if (i<45) then rho:=0.7 else rho:=1.4;
v[i]:=vv[i]+(nu[i+1]-nu[i-1])*(vv[i+1]-vv[i-1])*dt/h/h/4+
nu[i]*(vv[i+1]-2*vv[i]+vv[i-1])*dt/h/h+0.02*dt/rho; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
EC:=GraphResult; if EC <> grOK then Halt(1);
For i:=1 to N do if (i<45) then nu[i]:=0.7 else nu[i]:=1.3;
Repeat t:=t+0.01; v[1]:=0; v[N]:=0;
For i:=1 to N do vv[i]:=v[i]; For i:=2 to N-1 do Raschet;
For i:=1 to N do vv[i]:=v[i]; For ii:=2 to N-1 do begin i:=N+1-ii; Raschet; end;
If k/2000=round(k/2000) then For i:=1 to N do begin
line(round(100+v[i]*16),i*4+50,round(100+v[i+1]*16),i*4+54); end;
k:=k+1; until KeyPressed; CloseGraph;
END.
```

Задача 5. Исследуйте установившееся безвихревое течение вязкой жидкости в бесконечно длинной трубе (канале) постоянного сечения, внутри которой движется бесконечно длинное тело.

Рассмотрим течение вязкой жидкости, которое инвариантно по отношению к переносам в направлении движения (течение жидкости в трубе, обтекание бесконечно длинного корабля и т.д.). Для его расчета следует определить скорости в сечении, перпендикулярном направлению течения (оси z), то есть решить уравнение:

$$\frac{dv_z}{dt} = v \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Если $\partial p / \partial z = 0$, то в конечных разностях получаем:

$$v_{i,j}^{\tau+1} = v_{i,j}^{\tau} + v \left(\frac{v_{i-1,j}^{\tau} - 2v_{i,j}^{\tau} + v_{i+1,j}^{\tau}}{h^2} + \frac{v_{i,j-1}^{\tau} - 2v_{i,j}^{\tau} + v_{i,j+1}^{\tau}}{h^2} \right) \Delta t.$$

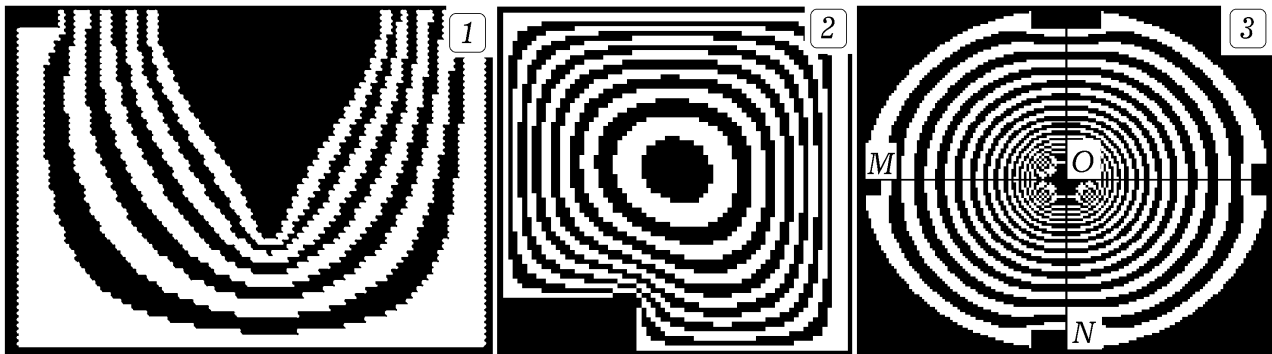


Рис. 4. Расчет течения вязкой жидкости в длинном канале.

Решение задачи требует правильного задания граничных условий. Слои вязкой жидкости, прилегающие к поверхности твердого тела, имеют одинаковую с ним скорость. Если жидкость имеет свободную поверхность, то скорость частиц этой поверхности равна скорости частиц, расположенных слоем ниже. Выше представлены результаты расчета обтекания длинного корпуса корабля (рис. 4.1 и 5.1), течения в трубе при разности давлений (рис. 4.2), движения жидкости в трубе в случае, когда вдоль ее оси протягивается нить (рис. 4.3 и 5.2).

Программа 4.

```
uses crt, graph; const n= 90; m=58; h=1; dt=0.02;
var ii,jj,kk,i,j,DV, MV, EC : integer; vv, v: array[1..N, 1..M] of real;
procedure Gr_usl; {---- Граничные условия ----}
begin for i:=1 to N do for j:=1 to M do v[i,j]:=vv[i,j]; for i:=2 to N-1 do
for j:=2 to M-1 do begin if (j<5)and(abs(5-i)<5) then v[i,j]:=0;
if (j<40)and(abs(i-50)<1+20*sqr(cos(j/25))) then v[i,j]:=300; end;
for i:=1 to N do v[i,M]:=0;
for j:=1 to M do begin v[1,j]:=0; v[N,j]:=0; end; end;
procedure Raschet; {---- Расчет скорости ----}
begin vv[i,j]:=v[i,j]+(v[i,j+1]-2*v[i,j]+v[i,j-1])*dt/(h*h)
+(v[i+1,j]-2*v[i,j]+v[i-1,j])*dt/(h*h); end;
procedure Draw; {---- Вывод на экран ----}
begin setcolor(round(v[i,j]/40)); if v[i,j]<1 then setcolor(9);
{if round(v[i,j]/60)<v[i,j]/60 then setcolor(15) else setcolor(8);}
rectangle(i*3+9,j*3,i*3+2,j*3+2); rectangle(i*3+10,j*3,i*3+1,j*3+1); end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
EC:=GraphResult; if EC <> grOK then Halt(1);
Repeat Gr_usl; for i:=1 to N-1 do for j:=2 to M-1 do Raschet;
Gr_usl; for jj:=2 to M-1 do for ii:=1 to N-1 do
begin i:=N+1-ii; j:=M+1-jj; Raschet; end;
for i:=1 to N do vv[i,1]:=vv[i,2]; kk:=kk+1;
```

```
if kk/30=round(kk/30) then for i:=2 to N-1 do for j:=2 to M-1 do Draw;  
until KeyPressed; CloseGraph;  
END.
```

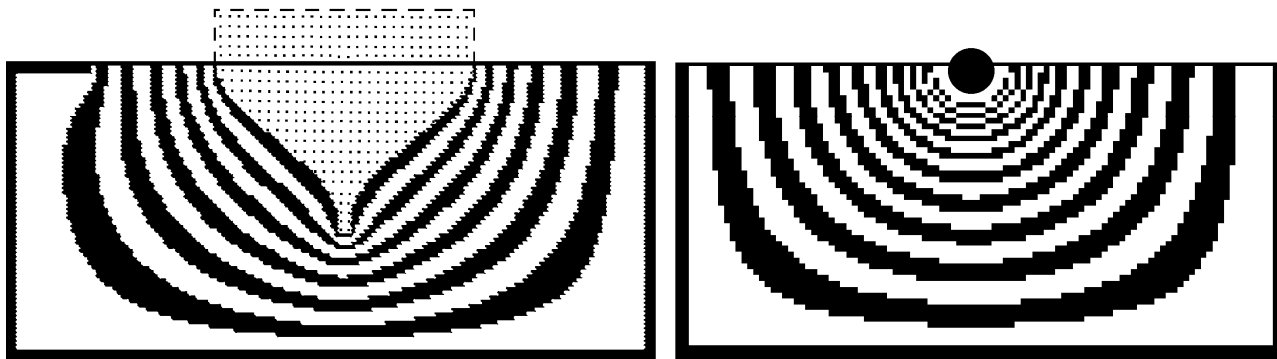


Рис. 5. Результаты расчета стационарного течения вязкой жидкости.

Задача 6. Рассчитайте течение вязкой жидкости в бесконечно длинной трубе произвольного сечения при наличии разности давлений на концах трубы.

Необходимо задать $\partial p / \partial z \neq 0$. Задача 6 аналогична задаче о стационарном распределении тепла на пластине, в каждой точке которой имеется источник тепла, а края имеют нулевую температуру (рис.4.2.).

-
1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1966. – 724 с.
 2. Сайт: <http://maier-rv.glazov.net> (электронный ресурс).

Майоров А.А., Соловьев И.В., Купцов А.Б., Шкуров Ф.В.

РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОЙ ТЕХНОЛОГИИ ПРОВЕДЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ДЕЛОВЫХ ИГР ДЛЯ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРОВ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА» (В ГЕОДЕЗИИ)»

a.kuptcov@gmail.com

*Московский государственный университет геодезии и картографии
(МИИГАиК)*

г. Москва

В тезисах доклада показана актуальность разработки информационной технологии проведения компьютерных деловых игр и раскрыта суть компьютерных деловых игр для подготовки бакалавров по направлению подготовки «Прикладная информатика» (в геодезии).

Проблема повышения качества высшего профессионального образования в условиях перехода на 2-ух ступенчатую систему образования безусловно является значимой и актуальной для высших учебных заведений.

Сегодня подготовка специалистов осуществляется в соответствии с традиционной лекционно-семинарской методикой. Данная методика позволяет